

Table des matières

Notations	3
Introduction	4
1 Rappel sur les opérateurs lipschitziens	5
1.1 Espaces métriques	5
1.2 Les applications lipschitziennes	6
1.3 Espace Lipschitzien	8
1.3.1 L'espace $Lip(X)$	8
1.3.2 L'espace $Lip_0(X)$	8
1.4 Espaces Lipschitziens-libres	9
2 Opérateurs compacts et faiblement compacts	14
2.1 Opérateurs linéaires compacts et faiblement compacts	14
2.1.1 Théorème de Factorisation de W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson et A. Pelczynski	15
2.2 L'adjooint d'un opérateur linéaire	16
2.2.1 Théorème de Schauder et Théorème de Gantmacher	17
2.3 Idéal d'opérateurs linéaires	17
2.4 Le dual d'un idéal d'opérateurs	19
3 Opérateurs lipschitziens compacts et faiblement compacts	20
3.1 Compacité pour les opérateurs lipschitziens	20
3.2 Idéal d'opérateurs lipschitziens	24

3.2.1	Opérateurs lipschitziens de rang fini	24
3.2.2	Version Lipschitzienne du Théorème de Schauder et Théorème de Gantmacher	25
3.2.3	Idéal d'opérateurs lipschitziens	27
3.2.4	Méthode de Composition	27
3.2.5	Méthode de dualité	28
3.3	Autres types d'opérateurs lipschitziens	29
3.3.1	Opérateur lipschitzien p -intégral	29
3.3.2	Opérateur lipschitzien fortement p -intégral	30
3.3.3	Opérateur lipschitzien p -nucléaire	31
3.3.4	Opérateur lipschitzien fortement p -nucléaire	32
3.3.5	Opérateurs lipschitziens p -sommants	32
3.3.6	Opérateur lipschitzien fortement p -sommant	33
4	Opérateurs lipschitziens libres compacts et faiblement compacts	36
4.1	Compacité pour les opérateurs lipschitziens libres	36
4.1.1	Théorème de Schauder pour les opérateurs lipschitziens li- bres compacts	37
4.1.2	Théorème de Gantmacher et Théorème de Factorisation de Davis- Figiel-Johnson-Pelczynski pour les opérateurs lipschitziens li- bres faiblement compacts	38
4.1.3	Propriété idéale des classes d'opérateurs lipschitziens libres.	39
4.2	Relations entre un opérateur T et $\hat{T}$ (p -sommant, p -intégral, p -nucléaire). . .	40
	Conclusion	42
	Bibliographie	42

Notations

$L(E; F)$	Espace des applications linéaires.
$\mathcal{L}(E; F)$	Espace des applications linéaires continues.
E^*	Espace dual de E .
i	Injection canonique.
e	Elément neutre ou distingué, on prend 0 si X est normé.
$\mathcal{M}_0$	Ensemble des espaces métriques complets pointés.
$\mathbb{K}$	Corps des scalaires $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).
$Lip(X, E)$	Espace de toutes les fonctions lipschitziennes bornées de X dans E .
$Lip_0(X, E)$	Espace de toutes les applications lipschitziennes de X dans E nulles au point e .
$X^\#$	Espace des formes lipschitziennes sur X .
$\tilde{X}$	Ensemble définis par $\{(x, y) \in X^2 : x \neq y\}$.
$\mathcal{F}(X)$	Espace de Lipschitz libre
$\ell_\infty(X)$	Espace des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$.
B_X	Boule unité fermée de l'espace X .
$\mathcal{K}(E; F)$	Espace de tous les opérateurs linéaires compacts de E dans F .
$\mathcal{W}(E; F)$	Espace de tous les opérateurs linéaires faiblement compacts de E dans F .
T^*	Adjoint de l'opérateur linéaire T .
$T^\#$	Adjoint de l'opérateur lipschitzien T .

Introduction

En 2009 J. D. Farmer et W. B. Johnson [14] ont introduit la version lipschitzienne d'opérateurs p -sommants, ils ont prouvé la première propriété de base. Depuis lors, beaucoup d'auteurs ont traité les versions lipschitziennes de quelques idéaux linéaires (voir, par exemple [5], [4] [22], [1]). Les opérateurs lipschitziens p -intégraux, p -nucléaires ont été étudié par Chen et Zheng dans [5] (voir aussi [14] pour les opérateurs lipschitziens p -intégraux). La version lipschitzienne d'opérateurs fortement p -sommants a été faite par Yahi, Achour et Rueda dans [22]. Les opérateurs lipschitziens compacts et faiblement compacts sont considérés par A. Jiménez-Vargas, J.M. Sepulcre, Moisés Villegas-Vallecillos dans [15], comme la version lipschitzienne d'opérateurs linéaires compacts et faiblement compacts.

Dans ce travail nous allons détailler l'article de M. G. Cabrera-Padilla et A. Jiménez-Vargas [8] en étudiant les opérateurs lipschitziens libres compacts et faiblement compacts d'un espace métrique pointé dans un espace métrique pointé .

Le mémoire est divisé en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions concernant les espaces métriques, les fonctions lipschitziennes, les espaces Lipschitziens et l'espace Lipschitzien libre.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les opérateurs linéaires compacts et faiblement compacts, tels que le théorème de Schauder et Gantmacher sont présentés.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'opérateurs lipschitziens compacts et faiblement compacts introduits par A. Jiménez-Vargas, J.M. Sepulcre, Moisés Villegas-Vallecillos dans [15] en 2014.

En quatrième chapitre, on a étudié une nouvelle classe d'opérateurs lipschitziens libres compacts introduite par M. G. Cabrera-Padilla et A. Jiménez-Vargas dans [8] en 2016.

Chapitre 1

Rappel sur les opérateurs lipschitziens

Dans ce chapitre, on fait rappel à quelques notions qui seront utilisées dans les chapitres qui suivent.

1.1 Espaces métriques

la notion d'espaces métriques a été formalisée par Maurice fréchet dans sa thèse "Doctorat d'Etat" en 1906. Un espace métrique est la donnée d'un ensemble dont les éléments sont considérés comme des points et d'une application qui permet de mesurer si deux points sont proches ou éloignés.

Soit X un ensemble non vide. On dit que d est une distance sur X si, d est une application de X^2 dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $(x, y, z) \in X^3$, on a

- (i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Séparation),
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symétrie),
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Inégalité triangulaire).

Un espace métrique pointé, est un espace métrique (X, d_X) qui a un élément neutre (ou distingué), noté e . On prend 0 si X est normé

Soit (X, d_X, e) est un espace métrique pointé. On note par

$$\mathcal{M}_0 = \{\text{espaces métriques complets pointés}\}.$$

La seconde inégalité triangulaire vérifié

$$(i.e., \forall x, y, z \in X : |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)).$$

1.2 Les applications lipschitziennes

Le morphisme naturel entre les espaces métriques est l'application lipschitzienne comme les opérateurs linéaires dans les espaces normés.

Définition 1.2.1 Soient (X, d_X) , (Y, d_Y) deux espaces métriques, une application

$f : X \longrightarrow Y$ est dite lipschitzienne, s'il existe $C \geq 0$ telle que

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y) \quad (1.1)$$

On note

$$\begin{aligned} Lip(f) &= \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}. \\ &= \inf \{C : \text{vérifiant l'inégalité (1.1)}\}. \end{aligned}$$

Soit (X, e_X, d_X) et (Y, e_Y, d_Y) deux espaces métriques pointés, on dira que f préserve le point distingué si $f(e_X) = e_Y$.

Proposition 1.2.1 Soit (X, e, d) un espace métrique pointé, alors l'application définie comme suit

$$\begin{aligned} f_z : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_z(x) = d(x, z) - d(e, z), \end{aligned}$$

est une application lipschitzienne et $Lip(f_z) = 1$

Preuve. D'après la seconde inégalité triangulaire, pour tout $x, y, z \in X$, on a

$$|f_z(x) - f_z(y)| = |d(x, z) - d(e, z) - d(y, z) + d(e, z)| \leq d(x, y).$$

Alors f_z est une fonction non expanssive (i.e., $Lip(f_z) \leq 1$).

Pour l'inégalité inverse, on a

$$\begin{aligned}
 \text{Lip}(f_z) &= \sup_{x \neq y} \frac{|f_z(x) - f_z(y)|}{d(x, y)} \\
 &\geq \frac{|f_z(z) - f_z(y)|}{d(z, y)} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

On obtient finalement que $\text{Lip}(f_z) = 1$. ■

Proposition 1.2.2 *Soit X un espace métrique et soient f, g deux fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$. Alors*

(a) $\text{Lip}(\lambda f) = |\lambda| \text{Lip}(f)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $\text{Lip}(f + g) \leq \text{Lip}(f) + \text{Lip}(g)$.

Preuve. (a) Si λ est dans $\mathbb{R}$, pour (x, y) dans X^2

$$\begin{aligned}
 \text{Lip}(\lambda f) &= \sup_{x \neq y} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{d_X(x, y)} \\
 &= \sup_{x \neq y} \frac{|\lambda| |f(x) - f(y)|}{d_X(x, y)} \\
 &= |\lambda| \text{Lip}(f).
 \end{aligned}$$

Donc λf est une fonction lipschitzienne et $\text{Lip}(\lambda f) = |\lambda| \text{Lip}(f)$.

(b) Soient f et g deux fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x, y \in X$, on a

$$\begin{aligned}
 |(f + g)(x) - (f + g)(y)| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\
 &\leq (\text{Lip}(f) + \text{Lip}(g))d_X(x, y).
 \end{aligned}$$

Donc $f + g$ est fonction lipschitzienne et

$$\text{Lip}(f + g) \leq \text{Lip}(f) + \text{Lip}(g).$$

■

Proposition 1.2.3 *Soient X, Y et Z trois espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications lipschitziennes, alors $g \circ f : X \longrightarrow Z$ est lipschitzienne et*

$$\text{Lip}(g \circ f) \leq \text{Lip}(g) \text{Lip}(f).$$

Preuve. Si f est lipschitzienne de X dans Y et g est lipschitzienne de Y dans Z , alors

$$\begin{aligned} d_Z(g \circ f(x), g \circ f(y)) &\leq Lip(g) d_Y(f(x), f(y)) \\ &\leq Lip(g) Lip(f) d_X(x, y). \end{aligned}$$

Alors $g \circ f$ est lipschitzienne et

$$Lip(g \circ f) \leq Lip(g) Lip(f).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

1.3 Espace Lipschitzien

Nous donnerons dans cette section quelques propriétés utiles concernant l'espace de toutes les fonctions lipschitziennes définies d'un espace métrique dans un espace de Banach.

1.3.1 L'espace $Lip(X)$

Définition 1.3.1 Soit X un espace métrique et E un espace de Banach. On note par $Lip(X, E)$ l'espace de toutes les fonctions lipschitziennes bornées de X dans E

$$Lip(X, E) = \{\text{fonctions lipschitziennes bornées } f : X \longrightarrow E\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{Lip(X, E)} = \max\{\|f\|_\infty, Lip(f)\}. \quad (1.2)$$

Si $E = \mathbb{R}$ on écrit $Lip(X, \mathbb{R}) = Lip(X)$.

$Lip(X)$ est un espace de Banach pour la norme (1.2), pour tout espace métrique X .

1.3.2 L'espace $Lip_0(X)$

Soit (X, d_X, e) un espace métrique pointé. Pour tout espace de Banach E , nous désignons par $Lip_0(X, E)$ l'espace de toutes les applications lipschitziennes $f : X \longrightarrow E$ nulles au point e

$$Lip_0(X, E) = \{f : X \longrightarrow E \text{ lipschitzienne telle que } f(e) = 0\}.$$

On le munit de la norme

$$Lip(f) = \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d_X(x, y)}.$$

Si $E = \mathbb{R}$ on écrit $Lip_0(X, \mathbb{R}) = Lip_0(X)$.

On l'appelle dual Lipschitzien et on le note par $X^\#$, l'espace de Banach des formes lipschitziennes sur X , i.e.,

$$X^\# = Lip_0(X, \mathbb{R}) = Lip_0(X),$$

muni de la norme

$$Lip(x^\#) = \sup_{x \neq y} \frac{|x^\#(x) - x^\#(y)|}{d_X(x, y)}.$$

$Lip_0(X)$ est un espace de Banach, pour tout espace métrique pointé X .

1.4 Espaces Lipschitziens-libres

Dans cette section on va présenter le prédual de $Lip_0(X)$, c'est à dire, il existe un espace de Banach Z , tel que $Lip_0(X)$ est isométriquement isomorphe à Z^* .

Définition 1.4.1 Soit X un espace métrique pointé. L'espace Lipschitzien libre sur X , noté $\mathcal{F}(X)$, est un sous-espace de $Lip_0(X)^*$

$$\mathcal{F}(X) = \overline{vect} \{ \delta_x; x \in X \},$$

tel que l'application $\delta_X : X \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ définie par $\delta_X(x) = \delta_x$, pour $x \in X$, tel que:

$$\begin{aligned} \delta_x : X^\# &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \delta_x(f) := f(x). \end{aligned}$$

On pose $\|\mu\|_{\mathcal{F}(X)} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda_i| d(x_i, x'_i) \right\}$, l'infimum est porté sur toutes les représentations de μ sous la forme

$$\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\delta_{x_i} - \delta_{x'_i}).$$

On note que l'espace Lipschitzien-libre introduit par Godefroy et Kalton en 2003 voir [16] bien que cet espace a été présenté à la première fois par Arens-Eells en 1956 [2] voir aussi le livre de Weaver [21] pour plus d'informations.

Soit $(x, y) \in X^2$, tel que $x \neq y$. On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \delta_{(x,y)} : X^\# &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \delta_{(x,y)}(f) := \frac{(\delta_x - \delta_y)(f)}{d(x,y)} = \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)}, \end{aligned}$$

laquelle appelle l'évaluation fonctionnelle lipschitzienne.

Notation 1.4.1 On note par $\tilde{X}$ le sous ensemble de X^2 défini par $\tilde{X} = \{(x, y) \in X^2 : x \neq y\}$.

Pour démontrer la proposition suivante, on a besoin des définitions suivantes.

Soit E un espace vectoriel.

Définition 1.4.2 (*Partie convexe*) Une partie C de E est convexe si elle est non vide et si, pour tous $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. Bien sûr, tout sous-espace vectoriel de E est convexe et toute intersection non vide des parties convexes de E est convexe.

Définition 1.4.3 (*L'enveloppe convexe*) L'enveloppe convexe d'une partie non vide A de E est l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant A , c'est la plus petite partie convexe de E contenant A , elle est notée $\text{co}(A)$ et on a

$$\text{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \theta_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \theta_i > 0, \sum_{i=1}^n \theta_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.4.4 (*Absolument convexe*) Une partie A de E est absolument convexe si elle est non vide et si, pour tous $x, y \in A$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que $|\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 1$, on a $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in A$. Une telle partie contient donc toujours l'élément 0.

Définition 1.4.5 L'enveloppe absolument convexe d'une partie non vide A de E comme étant l'intersection de toutes les parties absolument convexes de E qui contiennent A ; elle est notée $\Gamma(A)$. On vérifie aisément que

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1 \right\}.$$

Proposition 1.4.1 Soit X un espace métrique pointé

- (i) Les espaces $X^\#, \mathcal{F}(X)^*$ sont isométriquement isomorphiques. C'est-à-dire $X^\# \cong \mathcal{F}(X)^*$.
- (ii) La boule unité fermée de $\mathcal{F}(X)$ est l'enveloppe absolument convexe fermée de l'ensemble $\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X})$ dans $(X^\#)^*$. C'est-à-dire $B_{\mathcal{F}(X)} = \bar{\Gamma}(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X}))$.

Preuve. (i) On définit l'application suivante

$$\begin{aligned} S : \mathcal{F}(X)^* &\longrightarrow Lip_0(X) \\ \varphi &\longmapsto S(\varphi); (S(\varphi)(x) = \varphi(\delta_x - \delta_0)). \end{aligned}$$

Pour tout $x, x' \in X$. On a

$$\begin{aligned} |S(\varphi)(x) - S(\varphi)(x')| &= |\varphi(\delta_x - \delta_0) - \varphi(\delta_{x'} - \delta_0)| \\ &= |\varphi(\delta_x - \delta_{x'})| \\ &\leq \|\varphi\| d(x, x'). \end{aligned}$$

Ainsi $S(\varphi)(0) = \varphi(0)$, alors $S(\varphi) \in Lip_0(X)$. Nous concluons que S est une application linéaire et $\|S\| \leq 1$.

Maintenant, on définit l'application suivante

$$\begin{aligned} R : Lip_0(X) &\longrightarrow \mathcal{F}(X)^* \\ f &\longmapsto R(f), \end{aligned}$$

telle que $R(f)(\mu) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (f(x_i) - f(x'_i))$, pour $f \in Lip_0(X)$ et $\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\delta_{x_i} - \delta_{x'_i})$.

On a

$$\begin{aligned} |R(f)(\mu)| &= \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i (f(x_i) - f(x'_i)) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| |f(x_i) - f(x'_i)| \\ &\leq Lip(f) \sum_{i=1}^n |\lambda_i| d(x_i, x'_i), \end{aligned}$$

l'infimum est portée sur toutes les représentations de μ on trouve $R(f) \in \mathcal{F}(X)^*$ et $\|R(f)\| \leq Lip(f)$. Alors nous concluons que R est une application linéaire non expansive de $Lip_0(X)$ dans $\mathcal{F}(X)^*$.

Enfin, un simple calcul indique que $R \circ S = id_{\mathcal{F}(X)^*}$ et $S \circ R = id_{X^\#}$. Donc $X^\# \cong \mathcal{F}(X)^*$.

Pour la démonstration (ii) voir [15]. ■

Proposition 1.4.2 (a) Soit (X, d) un espace métrique pointé. L'application

$$\delta_X : X \longrightarrow \mathcal{F}(X)$$

est l'injection isométrique non linéaire de X dans $\mathcal{F}(X)$.

(b) Soit E un espace de Banach et soit $T : X \longrightarrow E$ une application lipschitzienne telle que $T(e) = 0$. Alors il existe une unique application linéaire $T_L : \mathcal{F}(X) \longrightarrow E$ telle que $T = T_L \circ \delta_X$ et $\|T_L\| = \text{Lip}(T)$.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}(X) & \\ \delta_X \uparrow & \searrow^{T_L} & \\ X & \xrightarrow{T} & E \end{array}$$

(c) Soient X et Y deux espaces métriques pointés et $T : X \longrightarrow Y$ une application lipschitzienne vérifiant $T(0_X) = 0_Y$. Alors il existe une unique application linéaire

$$\widehat{T} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y) \text{ vérifiant } \text{Lip}(T) = \|\widehat{T}\| \text{ et } \delta_Y \circ T = \widehat{T} \circ \delta_X.$$

Autrement dit, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \delta_X \downarrow & & \downarrow \delta_Y \\ \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\widehat{T}} & \mathcal{F}(Y) \end{array}$$

(d) Si X, Y et Z sont des espaces métriques pointés, $T \in \text{Lip}_0(X, Y)$ et $g \in \text{Lip}_0(Y, Z)$, Alors $\widehat{g \circ T} = \widehat{g} \circ \widehat{T}$.

Preuve. (a) Pour tout $x, x' \in X$, et pour tout $f \in \text{Lip}_0(X)$ on a

$$\begin{aligned} \|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} &= \|\delta_x - \delta_{x'}\|_{\mathcal{F}(X)} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{F}(X)}^*} |\langle \delta_x - \delta_{x'}, \varphi \rangle| \\ &= \sup_{R(g) \in B_{\mathcal{F}(X)}^*} |\langle \delta_x - \delta_{x'}, R(g) \rangle|, \quad R(g) = \varphi \\ &= \sup_{g \in B_{X\#}} |\langle \delta_x - \delta_{x'}, g \rangle| \\ &\leq \sup_{g \in B_{X\#}} |g(x) - g(x')| \\ &\leq \sup_{g \in B_{X\#}} \text{Lip}(g) d(x, x') \\ &\leq d(x, x'), \end{aligned}$$

ce que implique $\|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} \leq d(x, x')$. Donc δ_X est lipshitzienne et $Lip(\delta_X) \leq 1$. Pour l'inégalité inverse, pour tout $x, x' \in X$ on a

$$\begin{aligned}
 \|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} &= \|\delta_x - \delta_{x'}\|_{\mathcal{F}(X)} \\
 &= \sup_{f \in B_{X^\#}} |\langle \delta_x - \delta_{x'}, f \rangle| \\
 &\geq |\langle \delta_x - \delta_{x'}, f_x \rangle| \\
 &= |f_x(x) - f_x(x')| \text{ (voir la Proposition (1.2.1))} \\
 &= d(x, x').
 \end{aligned}$$

On obtient finalement que

$$\begin{aligned}
 \|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} &= \|\delta_x - \delta_{x'}\|_{\mathcal{F}(X)} \\
 &= d(x, x'),
 \end{aligned}$$

et $Lip(\delta_X) = 1$.

Pour la démonstration (b) voir [21, Theorem 2.2.4].

(c) Peut être facilement déduit de (b), est le lemme 3.1 dans [17]. Voir [16, Lemma 2.2] pour un cas particulier.

(d) l'assertion (c) donne aux opérateurs $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(X); \mathcal{F}(Y))$, $\widehat{g} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(Y); \mathcal{F}(Z))$ tels que $\delta_Y \circ T = \widehat{T} \circ \delta_X$ et $\delta_Z \circ g = \widehat{g} \circ \delta_Y$. Clairement, $g \circ T \in Lip_0(X, Z)$. Puisque $\delta_Z \circ g \circ T = \widehat{g} \circ \delta_Y \circ T = \widehat{g} \circ \widehat{T} \circ \delta_X$ et $\widehat{g} \circ \widehat{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(X); \mathcal{F}(Z))$, on en déduit que $\widehat{g \circ T} = \widehat{g} \circ \widehat{T}$ par l'unicité donnée en (c). ■

Chapitre 2

Opérateurs compacts et faiblement compacts

2.1 Opérateurs linéaires compacts et faiblement compacts

Dans cette section nous donnons quelques définitions, propriétés et notations qui concernent les opérateurs linéaires compacts.

Définition 2.1.1 Soit (X, d) un espace métrique et soit $K \subset X$. On dit que K est compact si toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de K contient une sous-suite convergente vers $x \in K$.

Définition 2.1.2 Soit X un espace métrique complet. Une partie A de X est relativement compacte si $\overline{A}$ est compact.

Proposition 2.1.1 Soit X un espace métrique complet. Une partie A de X est relativement compacte si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, A peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon r ($r \leq \varepsilon$).

Proposition 2.1.2 Tout fermé dans un compact est compact.

Définition 2.1.3 Soient E, F deux espaces de Banach. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact (faiblement compact) si le sous ensemble $T(B_E)$ est relativement compact (resp.

relativement faiblement compact) dans F . La collection de tous les opérateurs linéaires compacts (faiblement compacts) de E dans F sera notée $\mathcal{K}(E, F)$ (resp. $\mathcal{W}(E, F)$).

Proposition 2.1.3 *L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ des opérateurs compacts $T : E \longrightarrow F$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Preuve. L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ c'est un sous-espace vectoriel car si $T, S \in \mathcal{K}(E, F)$ on a

$$\overline{(S + T)(B_E)} \subseteq \overline{S(B_E)} + \overline{T(B_E)},$$

et que cette somme est compacte (image du produit de deux compacts par l'application continue $(x, y) \longmapsto x + y$).

Soit $T_n \in \mathcal{K}(E, F)$ tels que

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Nous allons voir que $T(B_E)$ est relativement compact. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geq 1$ tel que

$$\|T_N - T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $x \in B_E$, on a donc

$$\|T_N(x) - T(x)\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On peut écrire

$$T_N(B_E) \subseteq \bigcup_{j=1}^J B\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Alors

$$T(B_E) \subseteq \bigcup_{j=1}^J B(x_j, \varepsilon).$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ■

2.1.1 Théorème de Factorisation de W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson et A. Pelczynski

Théorème 2.1.1 [11] *Soient E, F deux espaces de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) L'opérateur T est faiblement compact.

(ii) Il existe un espace de Banach réflexif G , un opérateur linéaire bornée $S \in \mathcal{L}(G, F)$ et un opérateur linéaire bornée $g \in \mathcal{L}(E, G)$, tel que $T = S \circ g$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ & \searrow & \uparrow S \\ & g & G \end{array}$$

2.2 L'adjoint d'un opérateur linéaire

Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Pour un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit l'opérateur suivant $T^* : F^* \longrightarrow E^*$ par

$$\langle T(x), y^* \rangle = \langle x, T^*(y^*) \rangle, \quad \forall x \in E, y^* \in F^*.$$

L'opérateur T^* s'appelle l'adjoint de T .

Proposition 2.2.1 Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ alors T^* est linéaire et $\|T\| = \|T^*\|$.

Preuve. Soient $y_1^*, y_2^* \in F^*$, et $\alpha \in \mathbb{K}$ on a

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\alpha y_1^* + y_2^*) \rangle &= \langle T(x), \alpha y_1^* + y_2^* \rangle \\ &= \alpha \langle T(x), y_1^* \rangle + \langle T(x), y_2^* \rangle \\ &= \langle x, \alpha T^*(y_1^*) \rangle + \langle x, T^*(y_2^*) \rangle \\ &= \langle x, \alpha T^*(y_1^*) + T^*(y_2^*) \rangle. \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in E$ on a

$$T^*(\alpha y_1^* + y_2^*) = \alpha T^*(y_1^*) + T^*(y_2^*).$$

Ce qui implique que T^* est linéaire.

Il est aussi borné puisque

$$\begin{aligned} |y^*(T(x))| &\leq \|y^*\|_{F^*} \|T(x)\|_F \\ &\leq \|y^*\|_{F^*} \|T\| \|x\|_E, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\|T^*(y^*)\|_{E^*} &= \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|T^*(y^*)(x)|}{\|x\|} \\ &\leq \|y^*\|_{F^*} \|T\|,\end{aligned}$$

ce qui implique que $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ et $\|T^*\| \leq \|T\|$. Pour montrer l'inégalité inverse, nous prouvons que

$$\|T(x)\|_F \leq \|T^*\| \|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

L'opérateur l'adjoint implique que

$$\begin{aligned}|y^*(T(x))| &\leq \|T^*(y^*)\|_{E^*} \|x\|_E \\ &\leq \|y^*\|_{F^*} \|T^*\| \|x\|_E,\end{aligned}$$

et

$$\sup_{\|y^*\| \neq 0} \frac{|y^*(T(x))|}{\|y^*\|_{F^*}} \leq \|T^*\| \|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

2.2.1 Théorème de Schauder et Théorème de Gantmacher

Théorème 2.2.1 (Théorème de Schauder). Soit $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Alors nous avons l'équivalence suivante

- (1) L'opérateur T est dans $\mathcal{K}(E, F)$.
- (2) L'opérateur adjoint T^* est dans $\mathcal{K}(F^*, E^*)$.

Théorème 2.2.2 (Théorème de Gantmacher). Soit $T \in \mathcal{W}(E, F)$. Alors nous avons l'équivalence suivante

- (a) L'opérateur T est dans $\mathcal{W}(E, F)$.
- (b) L'opérateur adjoint T^* est dans $\mathcal{W}(F^*, E^*)$.

2.3 Idéal d'opérateurs linéaires

Définition 2.3.1 (Opérateur de rang fini). Soit E, F deux espace de Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. On dit que T est de rang fini si $\dim T(E) < \infty$.

L'espace d'opérateurs linéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(E, F)$.

Proposition 2.3.1 [18, Page 25] Soient E et F deux espaces normés. $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$, tels que

$$T(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) b_i = \sum_{i=1}^n \langle \varphi_i, x \rangle b_i$$

où $\varphi_i \in E^*$ et $b_i \in F$, $i = 1, \dots, n$.

Définition 2.3.2 (Idéal linéaire) Un idéal d'opérateur linéaire $\mathcal{I}$ est une classe d'opérateurs tels que pour tous E et F Banach, on a

- (1) $\mathcal{I}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$
- (2) $\mathcal{L}_f(E, F) \subset \mathcal{I}(E, F)$
- (3) **Propriétés d'idéal:** si $T \in \mathcal{I}(E, F)$, $u \in \mathcal{L}(X, E)$ et $v \in \mathcal{L}(F, Y)$ alors $v \circ T \circ u \in \mathcal{I}(X, Y)$.

De plus, si $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait

- (i) $(\mathcal{I}(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ est un espace normé (Banach).
- (ii) $\left\| id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}; \lambda \longmapsto id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda \right\|_{\mathcal{I}} = 1$.
- (iii) $\|v \circ T \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{I}} \|u\|$.

Alors $(\mathcal{I}(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ s'appelle idéal de Banach d'opérateurs linéaires.

Proposition 2.3.2 $\mathcal{L}_f$ est un idéal d'opérateurs linéaires.

Corollaire 2.3.1 Soit (T_n) une suite d'opérateurs continues de rangs finis de E dans F et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \longrightarrow 0$. Alors $T \in \mathcal{K}(E, F)$.

Définition 2.3.3 (Opérateur linéaire approximable)

Soit E, F deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire $T \in L(E, F)$ est dit approximable si elle est la limite de la norme $\|\cdot\|$ d'une suite d'opérateurs linéaires de rang fini de E dans F .

Corollaire 2.3.2 D'après le Corollaire (2.3.1) tout opérateur approximable est compact

Proposition 2.3.3 Les ensembles d'opérateurs linéaires compacts $\mathcal{K}(E, F)$ et faiblement compacts $\mathcal{W}(E, F)$ Sont des idéaux linéaires.

2.4 Le dual d'un idéal d'opérateurs

Définition 2.4.1 *Le dual d'un idéal $\mathcal{I}$ d'opérateurs linéaire est défini comme suit : pour tous espaces de Banach E et F*

$$\mathcal{I}^{dual}(E, F) = \{u \in \mathcal{L}(E, F) : u^* \in \mathcal{I}(F^*, E^*)\},$$

où $u^* : F^* \longrightarrow E^*$ est l'adjoint de u . Il est bien connu que $\mathcal{I}^{dual}$ est un idéal d'opérateurs. Nous écrivons $\|u\|_{\mathcal{I}^{dual}} = \|u^*\|_{\mathcal{I}}$.

D'après les Théorèmes (2.2.1), (2.2.2), on a

Corollaire 2.4.1 $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{dual}$ et $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{dual}$.

Preuve. On démontre que $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{dual}$ et $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{dual}$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{dual}(E, F) &= \{u \in \mathcal{L}(E, F) : u^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)\} \\ &\Leftrightarrow u \in \mathcal{K}(E, F) \text{ d'après 2.2.1} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{K} = \mathcal{K}^{dual}. \end{aligned}$$

et on a aussi

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{dual}(E, F) &= \{u \in \mathcal{L}(E, F) : u^* \in \mathcal{W}(F^*, E^*)\} \\ &\Leftrightarrow u \in \mathcal{W}(E, F) \text{ d'après 2.2.2} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{W} = \mathcal{W}^{dual}. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

Chapitre 3

Opérateurs lipschitziens compacts et faiblement compacts

3.1 Compacité pour les opérateurs lipschitziens

Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach, et soit l'application

$$T : X \longrightarrow E.$$

L'ensemble $\left\{ \frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}$ est appelé image lipschitzienne de T .

Elle est claire que l'application $T : X \longrightarrow E$ est lipschitzienne si son image lipschitzienne est bornée dans E , en effet si $\left\{ \frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}$ est bornée, alors il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\left\| \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)} \right\| \leq C, \text{ pour tout } x, y \in X.$$

Ce qui implique que $\|T(x) - T(y)\| \leq C d(x, y)$. C'est-à-dire T est lipschitzienne.

Définition 3.1.1 Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach. On dit qu'un opérateur $T \in \text{Lip}_0(X, E)$ est Lipschitzien compact (resp. Lipschitzienne faiblement compact), si son image lipschitzienne est relativement compacte (resp. relativement faiblement compacte) dans E .

On note par $Lip_{0K}(X, E)$ et $Lip_{0W}(X, E)$ l'ensembles d'opérateurs lipschitziens compacts et faiblement compacts entre X et E , respectivement. On a

$$Lip_{0K}(X, E) \subset Lip_{0W}(X, E) \subset Lip_0(X, E).$$

Notons que $Lip_{0K}(X, E)$ et $Lip_{0W}(X, E)$ sont des sous-espaces vectorielles de $Lip_0(X, E)$.

Lemme 3.1.1 Soit $T \in Lip_0(X, E)$. On considère sur $\tilde{X} = \{(x, y) \in X^2 : x \neq y\}$ l'application suivante

$$\begin{aligned} \delta_{\tilde{X}} : \tilde{X} &\longrightarrow (X^\#)^* \\ (x, y) &\longmapsto \delta_{\tilde{X}}(x, y) := \delta_{(x, y)} \text{ (voir Notation (1.4.1)).} \end{aligned}$$

Alors

$$T_L(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X})) \subset T_L(\bar{\Gamma}(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X}))) \subset \bar{\Gamma}(T_L(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X}))).$$

Preuve. On démontre que $T_L(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X})) \subset T_L(\bar{\Gamma}(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X})))$. On a

$$\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X}) \subset \bar{\Gamma}(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X})) \text{ (par définition).}$$

D'où

$$T_L(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X})) \subset T_L(\bar{\Gamma}(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X}))).$$

Pour la deuxième inclusion on prend $z_1 \in T_L(\bar{\Gamma}(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X}))) \Rightarrow \exists z_2 \in \bar{\Gamma}(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X}))$, telle que $z_1 = T_L(z_2)$, ce que implique il existe $b_n \in \Gamma(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X}))$ telle que, $z_2 = \lim_n b_n$, et

$$b_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(n)} \delta_{(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})} \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= T_L(z_2), \\ &= T_L(\lim_n b_n), \\ &= T_L\left(\lim_n \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(n)} \delta_{(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})}\right), \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(n)} T_L(\delta_{(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})}). \end{aligned}$$

D'où $z_1 \in \bar{\Gamma}(T_L(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X})))$. On obtient finalement que

$$T_L(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X})) \subset T_L(\bar{\Gamma}(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X}))) \subset \bar{\Gamma}(T_L(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X}))).$$

Ceci termine la preuve. ■

Proposition 3.1.1 Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach et soit $T \in Lip_0(X, E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) T est lipschitzien compact.

(ii) T_L est compact.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} T_L \left(\delta_{\tilde{X}} \left(\tilde{X} \right) \right) &= \{ T_L (\delta_{\tilde{X}} (x, y)); x, y \in X, x \neq y \} \\ &= \left\{ T_L \left(\frac{\delta_x - \delta_y}{d(x, y)} \right); x, y \in X, x \neq y \right\} \text{ (voir Notation (1.4.1))} \\ &= \left\{ \frac{T_L \circ \delta_x - T_L \circ \delta_y}{d(x, y)}; x, y \in X, x \neq y \right\} \\ &= \left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)}; x, y \in X, x \neq y \right\}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme (3.1.1) et la Proposition (1.4.1(ii)), on a

$$T_L \left(\delta_{\tilde{X}} \left(\tilde{X} \right) \right) \subset T_L (B_{\mathcal{F}(X)}) \subset \bar{\Gamma} \left(T_L \left(\delta_{\tilde{X}} \left(\tilde{X} \right) \right) \right).$$

C'est-à-dire

$$\overline{\left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)}; x, y \in X, x \neq y \right\}} \subset \overline{T_L (B_{\mathcal{F}(X)})} \subset \bar{\Gamma} \left(\overline{\left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)}; x, y \in X, x \neq y \right\}} \right).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) On suppose que T_L est compact, donc $\overline{T_L (B_{\mathcal{F}(X)})}$ est compacte, alors

$$\overline{\left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)}; x, y \in X, x \neq y \right\}},$$

est compact (voir la Proposition (2.1.2)), ce qui implique T est Lipschitzien compact.

(i) $\Rightarrow$ (ii) On suppose que T est Lipschitzien compact, donc

$$\overline{\left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)}; x, y \in X, x \neq y \right\}},$$

est relativement compact, et par conséquence

$$\bar{\Gamma} \left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)}; x, y \in X, x \neq y \right\},$$

est compact (Si A est relativement compact $\Rightarrow \bar{\Gamma}(A)$ est compact). On a aussi

$$\overline{T_L (B_{\mathcal{F}(X)})} \subset \bar{\Gamma} \left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)}; x, y \in X, x \neq y \right\}.$$

D'où la Proposition (2.1.2)) assure que $\overline{T_L (B_{\mathcal{F}(X)})}$ est compact $\Rightarrow T_L$ est compact.

On obtient finalement que (i) $\Leftrightarrow$ (ii). ■

Proposition 3.1.2 *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach et soit $T \in Lip_0(X, E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

- (i) *L'opérateur T est lipschitzien faiblement compact.*
- (ii) *L'opérateur T_L est faiblement compact.*
- (iii) *Ils existent un espace de Banach réflexif F , un opérateur linéaire bornée $S \in \mathcal{L}(F, E)$ et un opérateur lipschitzien $g \in Lip_0(X, F)$, tel que $T = S \circ g$.*

Preuve. La preuve de la Proposition (3.1.1) est valable pour montrer l'équivalence entre (i) et (ii). Si (ii) est vraie, en appliquant le Théorème de Davis-Figiel-Johnson-Pelczynski [11], il existe un espace de Banach réflexif F et deux opérateurs linéaire $S \in \mathcal{L}(F, E)$ et $R \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(X), F)$ tel que $T_L = S \circ R$. Soit $g = R \circ \delta_X$, il est Clairement, $g \in Lip_0(X, F)$, et $T = T_L \circ \delta_X = S \circ R \circ \delta_X = S \circ g$, ce qui prouve (iii). Enfin, (iii) implique (ii) est trivial. ■

Nous montrons maintenant la propriété idéale pour ces nouvelles catégories d'opérateurs lipschitziens.

Proposition 3.1.3 *Soient X et Y deux espaces métriques pointés, et soient E et F deux espaces de Banach. Soit $h \in Lip_0(Y, X)$ et $S \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $T \in Lip_{0K}(X, E)$, alors $S \circ T \circ h \in Lip_{0K}(Y, F)$.*

Preuve. Par ([17, Lemma 3.1]), il existe un unique opérateur linéaire

$$\hat{h} : \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(X)$$

vérifiant $\hat{h} \circ \delta_Y = \delta_X \circ h$

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{T} & E & \xrightarrow{S} & F \\ \delta_Y \downarrow & & \delta_X \downarrow & \nearrow T_L & & & \\ \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\hat{h}} & \mathcal{F}(X) & & & & \end{array}$$

L'application $S \circ T \circ h \in Lip_0(Y, F)$. En effet, on a $\|S \circ T \circ h(x) - S \circ T \circ h(y)\| \leq \|S\| Lip(T) Lip(h) d(x, y)$ et $(S \circ T \circ h)(0) = 0$. Alors, par la Proposition (1.4.2 (b)), il existe une unique application $(S \circ T \circ h)_L$ telle que $S \circ T \circ h = (S \circ T \circ h)_L \circ \delta_Y$. C'est-à-dire, on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{S \circ T \circ h} & F \\ \delta_Y \downarrow & \nearrow (S \circ T \circ h)_L & \\ \mathcal{F}(Y) & & \end{array}$$

On a $S \circ T_L \circ \hat{h} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(Y), F)$ alors $(S \circ T \circ h)_L = S \circ T_L \circ \hat{h} \in \mathcal{K}(\mathcal{F}(Y), F)$, en appliquant la Proposition (3.1.1), on obtient $S \circ T \circ h \in Lip_{0K}(Y, F)$. ■

Proposition 3.1.4 *Soit X et Y deux espaces métriques pointés et soit E et F deux espaces de Banach. Soit $h \in Lip_0(Y, X)$ et $S \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $T \in Lip_{0W}(X, E)$, alors $S \circ T \circ h \in Lip_{0W}(Y, F)$.*

Preuve. La preuve de la Proposition (3.1.3) est valable pour montrer la Proposition (3.1.4), mais nous préférons une nouvelle approche. Si $T \in Lip_{0W}(X, E)$, alors T admet un factorisation sous la forme

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{T} & E & \xrightarrow{S} & F \\ & & R \downarrow & \nearrow g & & & \\ & & F & & & & \end{array}$$

avec $g \in \mathcal{L}(F, E)$ et $R \in Lip_0(X, F)$, F un espace de Banach réflexif. On a $S \circ T \circ h = S \circ g \circ R \circ h$. Par la Proposition (3.1.2), on obtient $S \circ T \circ h \in Lip_{0W}(Y, F)$. ■

3.2 Idéal d'opérateurs lipschitziens

3.2.1 Opérateurs lipschitziens de rang fini

Définition 3.2.1 *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach. Un opérateur lipschitzien $T \in Lip_0(X, E)$ est Lipschitzien de rang fini si le sous espace vectoriel $\text{vect} \left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)}; x, y \in X, x \neq y \right\} \subset E$ est de dimension fini.*

Remarque 3.2.1 *Soient E un espace vectoriel et soit X un sous ensemble de E un opérateur $T : X \longrightarrow E$ (n'est pas nécessairement linéaire) est de rang fini si le sous espace vectoriel $\text{vect}\{T(x), x \in X\} \subset E$ est de dimension fini.*

Proposition 3.2.1 *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach et soit $T \in Lip_0(X, E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

- (i) *L'opérateur T est lipschitzien de rang fini.*
- (ii) *L'opérateur T est de rang fini.*
- (iii) *La linéarisation $T_L \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(X), E)$ est de rang fini.*

Proposition 3.2.2 *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach et soit $T \in Lip_0(X, E)$. Si T est de rang fini, alors T admet une représentation de la forme $T = \sum_{i=1}^n v_i g_i$; $v_i \in E$, $g_i \in X^\#$.*

Preuve. Soit $T = \sum_{i=1}^n v_i g_i$; $v_i \in E$, $g_i \in X^\#$. Pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} T(x) &= T_L \circ \delta_X(x) \\ &= T_L \circ \delta_x \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) v_i \circ \delta_x; \varphi_i \in \mathcal{F}(X)^*, v_i \in E \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(\delta_x) v_i \\ &= \sum_{i=1}^n R(g_i)(\delta_x) v_i \text{ telle que } R(g_i) = \varphi_i \text{ voir la Proposition (1.4.1 (ii))} \\ &= \sum_{i=1}^n g_i(x) v_i. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ■

Définition 3.2.2 (Opérateur Lipschitzien approximable) *Soit X un espace métrique pointé et E un espace de Banach. Un opérateur lipschitzien $f \in Lip_0(X, E)$ est dit Lipschitzien approximable, s'il est la limite de la norme $Lip(\cdot)$ d'une suite d'opérateurs lipschitziens de rang finis de X dans E .*

Il est clair que tout opérateur Lipschitzien approximable de X dans E est Lipschitzien compact, en appliquant les Propositions (1.4.2 (b)), (3.1.1) et (3.2.1).

3.2.2 Version Lipschitzienne du Théorème de Schauder et Théorème de Gantmacher

Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach. Sawashima [19] a défini l'adjoint lipschitzien $T^\# : Lip_0(E) \longrightarrow Lip_0(X)$ d'une application lipschitzienne $T \in Lip_0(X, E)$ par la formule

$$\begin{aligned} T^\# : Lip_0(E) &\longrightarrow Lip_0(X) \\ g &\longmapsto T^\#(g) = g \circ T \end{aligned}$$

L'opérateur $T^\#$ est linéaire continu et $\|T^\#\| = Lip(T)$. La restriction de $T^\#$ sur E^* définit un opérateur linéaire continu appelé l'opérateur transposé lipschitzien de T et noté ici par T^t , et on a aussi $\|T^t\| = Lip(T)$.

Théorème 3.2.1 Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach et soit $T \in Lip_0(X, E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) T est lipschitzien faiblement compact.
- (ii) T^t est faiblement compact de E^* dans $X^\#$.

Preuve. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Soit l'isomorphe isomtrie S comme indiqué dans la démonstration du Proposition (1.4.1).

$$S : \mathcal{F}(X)^* \longrightarrow Lip_0(X).$$

D'où

$$\begin{aligned} T \in Lip_{0W}(X, E) &\Leftrightarrow T_L \in \mathcal{W}(\mathcal{F}(X), E) \\ &\Leftrightarrow (T_L)^* \in \mathcal{W}(E^*, \mathcal{F}(X)^*) \\ &\Leftrightarrow S \circ (T_L)^* \in \mathcal{W}(E^*, X^\#) \\ &\Leftrightarrow T^t \in \mathcal{W}(E^*, X^\#), \end{aligned}$$

en appliquant la Proposition (3.1.2), le Théorème de Gantmacher (voir la Proposition (2.2.2)), le fait que l'espace d'opérateurs linéaires faiblement compacts est un Banach d'opérateur idéal linéaire injectif et l'égalité $T^t = S \circ (T_L)^*$ comme indiqué dans la démonstration du Proposition (1.4.1). ■

Nous formulons maintenant une version Lipschitzienne du théorème de Schauder sur la compacité de l'adjoint d'un opérateur linéaire compact.

Théorème 3.2.2 Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach et $T \in Lip_0(X, E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) T est lipschitzien compact.
- (ii) T^t est compact de E^* dans $X^\#$.

Preuve. D'après la Proposition (3.1.1), le théorème de Schauder et le fait que l'espace d'opérateurs linéaires compacts entre les espaces de Banach est un Banach d'opérateurs idéal linéaire injectif, on en déduit que

$$\begin{aligned} T \in Lip_{0K}(X, E) &\Leftrightarrow T_L \in \mathcal{K}(\mathcal{F}(X), E) \\ &\Leftrightarrow (T_L)^* \in \mathcal{K}(E^*, \mathcal{F}(X)^*) \\ &\Leftrightarrow S \circ (T_L)^* \in \mathcal{K}(E^*, X^\#) \\ &\Leftrightarrow T^t \in \mathcal{K}(E^*, X^\#), \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ■

3.2.3 Idéal d'opérateurs lipschitziens

Le but de cette section est de présenter le concept d'idéal d'opérateur Lipschitzien qui est introduit par [1] .

Définition 3.2.3 (Idéal Lipschitzien) *Un idéal d'opérateur lipschitzien $\mathcal{I}_{Lip}$ est un sous classe de Lip_0 tel que pour tout espace métrique pointé X et tout espace de Banach E , les composants $\mathcal{I}_{Lip}(X, E) := Lip_0(X, E) \cap \mathcal{I}_{Lip}$, satisfait*

- (i) $\mathcal{I}_{Lip}(X, E)$ est un sous espace vectoriel de $Lip_0(X, E)$
- (ii) $vg \in \mathcal{I}_{Lip}(X, E)$ pour $v \in E$ et $g \in X^\#$
- (iii) **Propriété d'idéal:** si $S \in Lip_0(Y, X)$, $T \in \mathcal{I}_{Lip}(X, E)$ et $w \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $w \circ T \circ S \in \mathcal{I}_{Lip}(Y, F)$.

De plus, si $\|\cdot\|_{\mathcal{I}_{Lip}} : \mathcal{I}_{Lip} \longrightarrow [0, +\infty[$ satisfait

- (iv) $(\mathcal{I}_{Lip}(X, E), \|\cdot\|_{\mathcal{I}_{Lip}})$ est un espace normé (Banach) et $Lip(T) \leq \|T\|_{\mathcal{I}_{Lip}}$ pour tout $T \in \mathcal{I}_{Lip}(X, E)$
 - (iv') $\|id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda\|_{\mathcal{I}_{Lip}} = 1$
 - (iii') $\|w \circ T \circ S\|_{\mathcal{I}_{Lip}} \leq Lip(S) \|T\|_{\mathcal{I}_{Lip}} \|w\|$.
- Alors, $(\mathcal{I}_{Lip}(X, E), \|\cdot\|_{\mathcal{I}_{Lip}})$ s'appelle idéal de Banach d'opérateurs lipschitziens.

Les auteurs dans leurs article [1, section 3], ont donné deux manières pour créer un idéal d'opérateur lipschitzien.

3.2.4 Méthode de Composition

Définition 3.2.4 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal d'opérateurs linéaires, un opérateur lipschitzien $T \in Lip_0(X, E)$ appartient à l'opérateur composition d'idéal lipschitzien $\mathcal{I} \circ Lip_0$ notée $T \in \mathcal{I} \circ Lip_0(X, E)$, s'il y a un espace de Banach F , un opérateur lipschitzien $S \in Lip_0(X, F)$ et un opérateur linéaire $u \in \mathcal{I}(F, E)$, telle que $T = u \circ S$. Si $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ est un opérateur idéal normé, et nous écrivons $\|T\|_{\mathcal{I} \circ Lip_0} = \inf \|u\|_{\mathcal{I}} Lip(S)$.*

Proposition 3.2.3 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal d'opérateur linéaire, pour $T \in Lip_0(X, E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

- (1) $T \in \mathcal{I} \circ Lip_0(X, E)$.

(2) $T_L \in \mathcal{I}(\mathcal{F}(X), E)$.

Si $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ est un opérateur idéal normé, on a $\|T\|_{\mathcal{I} \circ Lip_0} = \|T_L\|_{\mathcal{I}}$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que $T \in \mathcal{I} \circ Lip_0(X, E)$. Ensuite, il existe un espace de Banach F , un opérateur lipschitzien $S \in Lip_0(X, F)$ et un opérateur linéaire $u \in \mathcal{I}(F, E)$ de telle sorte que $T = u \circ S$. Depuis $T_L = u \circ S_L$ la propriété idéale garantit que $T_L \in \mathcal{I}(\mathcal{F}(X), E)$. Si $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ est normé alors

$$\|T_L\|_{\mathcal{I}} = \|u \circ S_L\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \|S_L\| = \|u\|_{\mathcal{I}} Lip(S).$$

Prendre l'infimum sur toutes ces factorisations nous obtenons $\|T_L\|_{\mathcal{I}} \leq \|T\|_{\mathcal{I} \circ Lip_0}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Considérons la factorisation de T donnée par $T = T_L \circ \delta_X$. De plus δ_X est Lipschitzien et $T_L \in \mathcal{I}(\mathcal{F}(X), E)$, puis $T \in \mathcal{I} \circ Lip_0(X, E)$ et, si $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ est normé on a

$$\|T\|_{\mathcal{I} \circ Lip_0} = \|T_L \circ \delta_X\|_{\mathcal{I} \circ Lip_0} \leq \|T_L\|_{\mathcal{I}} Lip(\delta_X) = \|T_L\|_{\mathcal{I}}.$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ■

Corollaire 3.2.1 Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach. On a

- $Lip_{0K}(X, E) = \mathcal{K} \circ Lip_0(X, E)$ isométriquement.
- $Lip_{0W}(X, E) = \mathcal{W} \circ Lip_0(X, E)$ isométriquement.

Proposition 3.2.4 Si $\mathcal{I}$ est un (normé, fermé, Banach, injective) opérateur idéal alors, $\mathcal{I} \circ Lip_0$ est un (respectivement normé, fermé, Banach, injective) idéal d'opérateur Lipschitzien

Corollaire 3.2.2 Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach. Les espaces $Lip_{0K}(X, E)$ et $Lip_{0W}(X, E)$, sont des espaces de Banach d'idéal Lipschitzien injectif, avec la norme $Lip(\cdot)$.

3.2.5 Méthode de dualité

Définition 3.2.5 Le dual d'idéal $\mathcal{I}$ d'opérateur lipschitzien est défini par

$$\mathcal{I}^{Lip_0-dual}(X, E) = \{T \in Lip_0(X, E) : T^t \in \mathcal{I}(E^*, X^\#)\}.$$

Théorème 3.2.3 [1, Théorém 3.9] Soit $\mathcal{I}$ un idéal d'opérateur linéaire Alors,

$$\mathcal{I}^{Lip_0-dual} = \mathcal{I}^{dual} \circ Lip_0.$$

Corollaire 3.2.3 Un opérateur lipschitzien est compact (faiblement compact) si, et seulement si, son transposé est compact (faiblement compact).

Preuve. Nous obtenons les résultats directement à partir du Corollaire (3.2.1) la Proposition (2.4.1) et le Théorème (3.2.3). En effet, ils donnent les égalités

$$Lip_{0\mathcal{K}} = \mathcal{K} \circ Lip_0 = \mathcal{K}^{dual} \circ Lip_0 = \mathcal{K}^{Lip_0-dual} \text{ et } Lip_{0\mathcal{W}} = \mathcal{W} \circ Lip_0 = \mathcal{W}^{dual} \circ Lip_0 = \mathcal{W}^{Lip_0-dual}.$$

Ceci termine la preuve. ■

3.3 Autres types d'opérateurs lipschitziens

3.3.1 Opérateur lipschitzien p -intégral

Soient E, F deux espaces de Banach, et $1 \leq p < \infty$. un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est p -intégral s'il existe une mesure probabilité μ et deux opérateurs $A \in \mathcal{L}(L_P(\mu), F^{**})$ et $B \in \mathcal{L}(E, L_\infty(\mu))$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} L_\infty(\mu) & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & L_p(\mu) \\ B \uparrow & & \downarrow A \\ E & \xrightarrow{T} F & \xrightarrow{J_F} F^{**} \end{array}$$

où $I_{\infty,p} : L_\infty(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ est l'opérateur d'inclusion.

J. D. Farmer et W.B. Johnson, ont introduit la généralisation suivante dans [14]. Soient X, Y deux espaces métriques pointés, et $1 \leq p < \infty$. un opérateur lipschitzien $T \in Lip_0(X, Y)$ est un opérateur lipschitzien p -intégral s'il existe une mesure probabilité μ et deux opérateurs lipschitziens $a \in Lip_0(L_P(\mu), (Y^\#)^*)$, et $b \in Lip_0(X, L_\infty(\mu))$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} L_\infty(\mu) & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & L_p(\mu) \\ b \uparrow & & \downarrow a \\ X & \xrightarrow{T} Y & \xrightarrow{J_Y^L} (Y^\#)^* \end{array}$$

où $J_Y^L : Y \rightarrow (Y^\#)^*$ est l'isométrie canonique.

$Lip_{0pI}(X, Y)$ l'ensemble de tous les opérateurs lipschitziens p -intégraux de X dans Y . et

$$Lip_{pI}(T) = \inf Lip(a).Lip(b)$$

3.3.2 Opérateur lipschitzien fortement p -intégral

Soient X, Y deux espaces métriques pointés, et $1 \leq p < \infty$. un opérateur $T \in Lip_0(X, Y)$ est appelé un opérateur lipschitzien fortement p -intégral, s'il existe un mesure probabilité μ , un opérateur linéaire borné $A \in \mathcal{L}(L_P(\mu), (Y^\#)^*)$, un opérateur lipschitzien $b \in Lip_0(X, L_\infty(\mu))$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} L_\infty(\mu) & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & L_p(\mu) \\ b \uparrow & & \downarrow A \\ X \xrightarrow{T} Y & \xrightarrow{J_Y^L} & (Y^\#)^* \end{array}$$

On définit

$$Lip_{pSI}(T) = \inf \| A \| .Lip(b)$$

et $Lip_{0pSI}(X, Y)$ est l'ensemble de tous les opérateurs lipschitziens fortement p -intégral de X dans Y .

Proposition 3.3.1 *Soient X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et $1 \leq p < \infty$. Chaque opérateur lipschitzien fortement p -intégral de X dans E est lipschitzien faiblement compact.*

Preuve. Soit $T : X \rightarrow E$ un opérateur lipschitzien fortement p -intégral, donc on a la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccc} X \xrightarrow{T} E & \xrightarrow{J_E} & E^{**} \\ \downarrow I_{\infty,p} \circ b & \nearrow A & \\ L_p(\mu) & & \end{array}$$

Si $p > 1$, alors $L_p(\mu)$ est réflexif, d'où par la Proposition 3.1.2 l'opérateur $J_E \circ F$ est lipschitzien faiblement compact et ainsi est également T par la Corollaire (3.2.2).

Pour le cas $p = 1$, soient $q > 1$ et l'opérateur $I_{\infty,1} : L_{\infty}(\mu) \rightarrow L_1(\mu)$. Donc on a la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & E & \xrightarrow{J_E} & E^{**} \\ \downarrow I_{\infty,q} \circ b & \nearrow & I_{\infty,1 \circ A} & & \\ & L_q(\mu), & & & \end{array}$$

où $I_{q,1}$ et $I_{\infty,q}$ sont les injections canoniques. L'espace $L_q(\mu)$ est réflexif, d'où par la Proposition (3.1.2) l'opérateur $J_E \circ F$ est lipschitzien faiblement compact, et ainsi est également T par le Corollaire (3.2.2). ■

3.3.3 Opérateur lipschitzien p -nucléaire

Soient E, F deux espaces de Banach. un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est p -nucléaire s'il existe deux opérateurs $A \in \mathcal{L}(\ell_P, F)$ et $B \in \mathcal{L}(E, \ell_{\infty})$ et un opérateur diagonal $M_{\lambda} \in \mathcal{L}(\ell_{\infty}, \ell_P)$ induit par une séquence $\lambda \in \ell_P$ telle que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \ell_{\infty} & \xrightarrow{M_{\lambda}} & \ell_P \\ B \uparrow & & \downarrow A \\ E & \xrightarrow{T} & F \end{array}$$

Les opérateurs lipschitziens p -nucléaires ont été introduits par D. Chen et B. Zheng dans [5] pour les applications d'un espace métrique dans un espace de Banach. Soient X, Y deux espaces métriques pointés, On dit que $T \in Lip_0(X, Y)$ est un opérateur lipschitzien p -nucléaire s'il existe $a \in Lip_0(\ell_P, Y)$, $b \in Lip_0(X, \ell_{\infty})$ et l'opérateur diagonal $M_{\lambda} \in \mathcal{L}(\ell_{\infty}, \ell_P)$ induit par une séquence $\lambda \in \ell_P$ telle que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \ell_{\infty} & \xrightarrow{M_{\lambda}} & \ell_P \\ b \uparrow & & \downarrow a \\ X & \xrightarrow{T} & Y \end{array}$$

et

$$Lip_{pN}(T) = \inf Lip(a) \cdot \|M_{\lambda}\| \cdot Lip(b)$$

et $Lip_{0pN}(X, Y)$ est l'ensemble de tous les opérateurs lipschitziens p -nucléaires de X dans Y .

3.3.4 Opérateur lipschitzien fortement p -nucléaire

Soit $1 \leq p < \infty$. Soient X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et $1 \leq p < \infty$. Un opérateur $T \in Lip_0(X, E)$ est appelé lipschitzien fortement p -nucléaire s'il existe, un opérateur linéaire borné $A \in \mathcal{L}(\ell_p, E)$, un opérateur lipschitzien $b \in Lip_0(X, \ell_\infty)$ et un opérateur diagonal $M_\lambda \in \mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_p)$, tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & E \\ b \downarrow & & \uparrow A \\ \ell_\infty & \xrightarrow{M_\lambda} & \ell_p \end{array}$$

Proposition 3.3.2 *Soient X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et $1 \leq p < \infty$. Chaque opérateur lipschitzien fortement p -nucléaire de X dans E est lipschitzien faiblement compact.*

Preuve. Soit $T : X \rightarrow E$ un opérateur lipschitzien fortement p -nucléaire. Donc on a la factorisation suivante

$$T = AM_\lambda b : X \xrightarrow{b} \ell_\infty \xrightarrow{M_\lambda} \ell_p \xrightarrow{A} E.$$

Soit b_L le linéarisation de b . Donc l'opérateur T_L admet la factorization suivante

$$T_L = AM_\lambda b_L : X \xrightarrow{b_L} \ell_\infty \xrightarrow{M_\lambda} \ell_p \xrightarrow{A} E.$$

Ce qui implique que T_L est p -nucléaire et par [5, Corollaire 2.2.5] T_L est faiblement compact. Alors T est Lipschitzien faiblement compact. ■

Proposition 3.3.3 [15, Proposition 2.7] *Soient X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et $1 \leq p < \infty$. Chaque opérateur lipschitzien fortement p -nucléaire de X dans E est Lipschitzien compact.*

3.3.5 Opérateurs lipschitziens p -sommants

La version non linéaire d'opérateurs p -sommants a été introduite par J.D. Farmer et W.B. Johnson dans [14]. Il sont appelés opérateurs Lipschitzien p -sommants. Soient (X, d_X) est un espace métrique pointé et (Y, d_Y) est un espace métrique. La boule unité $B_{X^\#}$ de $X^\#$ est compacte pour la topologie de convergence simple de X .

Définition 3.3.1 On dit que l'opérateur $T : X \rightarrow Y$ est Lipschitzien p -sommant ($1 \leq p < \infty$), si

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0 \text{ telle que } , \forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_i)_{1 \leq i \leq n}, \forall (y_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X \\ \sum_{i=1}^n d_Y(T(x_i), T(y_i))^p \leq C^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(y_i)|^p. \end{array} \right.$$

La plus petite constante C possible est notée par $Lip_{pS}(T)$, et on note par $Lip_{0pS}(X, Y)$ l'espace d'opérateurs Lipschitziens p -sommants.

Si Y est un espace de Banach, alors l'espace $Lip_{0pS}(X, Y)$ est un espace de Banach muni de la norme $Lip_{pS}(\cdot)$. Si T est linéaire alors $Lip_{pS}(T) \leq \pi_p(T)$.

Proposition 3.3.4 (Propriété idéal) Soient X, Y, E, F des espaces métriques. Soit $v : E \rightarrow X, w : Y \rightarrow F$ des fonctions Lipschitziennes et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur Lipschitzien p -sommant. Alors l'opérateur wTv est Lipschitzien p -sommant et $Lip_{pS}(wTv) \leq Lip(w)Lip_{pS}(T)Lip(v)$.

Preuve. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d_F(wTv(x_i), wTv(y_i))^p &\leq Lip(w)^p \sum_{i=1}^n d_Y(Tv(x_i), Tv(y_i))^p \\ &\leq Lip(w)^p Lip_{pS}(T)^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n |f(v(x_i)) - f(v(y_i))|^p \\ &\leq Lip(w)^p Lip_{pS}(T)^p Lip(v)^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{f \circ v}{Lip(v)}(x_i) - \frac{f \circ v}{Lip(v)}(y_i) \right|^p \\ &\leq Lip(w)^p Lip_{pS}(T)^p Lip(v)^p \sup_{g \in B_{E^\#}} \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(y_i)|^p. \end{aligned}$$

D'où $wTv \in Lip_{0pS}(E, F)$ et $Lip_{pS}(wTv) \leq Lip(w)Lip_{pS}(T)Lip(v)$. ■

3.3.6 Opérateur lipschitzien fortement p -sommant

La version lipschitzienne d'opérateurs fortement p -sommants ($1 < p \leq \infty$) a été introduite par R. Yahi, D. Achour et P. Rueda [22]. et sont appelés opérateurs lipschitziens fortement

p -sommants. Soit $1 < p \leq \infty$. Un opérateur lipschitzien $T \in Lip_0(X, E)$ est appelé lipschitzien fortement p -sommant, s'il existe, un espace de Banach F et un opérateur $S \in D_P(F, E)$ (i.e., $S^* \in \Pi_p(E^*, F^*)$) tels que

$$|\langle y^*, T(x) - T(x') \rangle| \leq d(x, x') \|S^*(y^*)\|. \quad (3.1)$$

Pour tout $x, x' \in X; y^* \in E^*$. On note par $D_{st,p}^L(X, E)$ l'ensemble d'opérateurs lipschitziens fortement p -sommants, entre X et E . Pour tout $T \in D_{st,p}^L(X, E)$ on pose $d_{st,p}^L(T) = \inf d_p(S)$ tel que S vérifie l'inégalité (3.1).

Proposition 3.3.5 *Soient X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et $1 < p \leq \infty$, tout opérateur fortement lipschitzien p -sommant entre X et E est Lipschitzien faiblement compact.*

Preuve. Dans [22, Théorème 4.1], on a

$$T \in D_{st,p}^L(X, E) \Leftrightarrow T^t \in \Pi_q(E^*, X^\#).$$

Comme tout opérateur q -sommant est faiblement compact (voir [10]) alors d'après la Proposition (3.2.1), tout opérateur fortement lipschitzien p -sommant entre X et E est Lipschitzien faiblement compact. ■

Proposition 3.3.6 *Soit X, Y deux espaces métriques pointés, et soit $1 \leq p < \infty$.*

- (a) $Lip_{0pN}(X, Y) \subset Lip_{0pI}(X, Y)$ et $Lip_{pI}(T) \leq Lip_{pN}(T)$ pour chaque $T \in Lip_{0pN}(X, Y)$.
- (b) $Lip_{0pI}(X, Y) \subset Lip_{0pS}(X, Y)$ et $Lip_{pS}(T) \leq Lip_{pI}(T)$ pour chaque $T \in Lip_{0pI}(X, Y)$.

Preuve. (a) Soit $T \in Lip_{0pN}(X, Y)$ et considérons une factorisation typique de Lipschitzien p -nucléaire pour T :

$$T = aM_\lambda b : X \xrightarrow{b} \ell_\infty \xrightarrow{M_\lambda} \ell_p \xrightarrow{a} Y.$$

Il est connu (voir par exemple [10, P.111]) que l'opérateur linéaire M_λ est strictement p -intégral, c'est-à-dire admet une factorisation

$$M_\lambda = AI_{\infty,p}B : \ell_\infty \xrightarrow{B} L_\infty(\mu) \xrightarrow{I_{\infty,p}} L_p(\mu) \xrightarrow{A} \ell_p,$$

où μ est une mesure de probabilité, $A \in \mathcal{L}(L_P(\mu), \ell_p)$ et $B \in \mathcal{L}(\ell_\infty, L_\infty(\mu))$. De plus, la norme strictement p -intégrale de M_λ définie par $\inf \|A\| \cdot \|B\|$ où l'infimum est pris sur toutes ces factorisations est $\|M_\lambda\|$. Nous arrivons donc à une factorisation de Lipschitzien p -intégral pour T :

$$J_Y^L T = J_Y^L a A I_{\infty,p} B b : X \xrightarrow{b} \ell_\infty \xrightarrow{B} L_\infty(\mu) \xrightarrow{I_{\infty,p}} L_p(\mu) \xrightarrow{A} \ell_p \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{J_Y^L} (Y^\#)^*.$$

Par conséquent $T \in Lip_{0pI}(X, Y)$ et $Lip_{pI}(T) \leq Lip(aA)Lip(bB) \leq Lip(a) \|A\| \|B\| Lip(b)$. En passant deux fois à l'infimum, on obtient $Lip_{pI}(T) \leq Lip(a) \|M_\lambda\| Lip(b)$ et $Lip_{pI}(T) \leq Lip_{pN}(T)$.

(b) Soit $T \in Lip_{0pI}(X, Y)$ et on prend une factorisation de Lipschitzien p -intégral

$$J_Y^L T = a I_{\infty,p} b : X \xrightarrow{b} L_\infty(\mu) \xrightarrow{I_{\infty,p}} L_p(\mu) \xrightarrow{a} (Y^\#)^*.$$

on remarque que $I_{\infty,p}$ est p -sommant avec $\pi_p(I_{\infty,p}) = 1$ par [10, 2.9 (d)]. Par conséquent $I_{\infty,p} \in Lip_{0pS}(L_\infty(\mu), L_p(\mu))$ et $Lip_{pS}(I_{\infty,p}) = 1$ par [14, Theorem 2]. Alors $J_Y^L T$ est dans $Lip_{0pS}(X, (Y^\#)^*)$ par sa propriété idéale. Par sa propriété d'injectivité, il s'ensuit que $T \in Lip_{0pS}(X, Y)$ et

$$Lip_{pS}(T) = Lip_{pS}(J_Y^L T) = Lip_{pS}(a I_{\infty,p} b) \leq Lip(a) Lip_{pS}(I_{\infty,p}) Lip(b) = Lip(a) Lip(b)$$

Puis la relation $Lip_{pS}(T) \leq Lip_{pI}(T)$ suit facilement. ■

Chapitre 4

Opérateurs lipschitziens libres compacts et faiblement compacts

4.1 Compacité pour les opérateurs lipschitziens libres

D'après [15, Definition 2.1], Soient X un espace métrique pointé et Y un espace de Banach. On dit qu'un opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est Lipschitzien compact (resp. Lipschitzien faiblement compact) si l'ensemble

$$\left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}$$

est relativement compact (resp. relativement faiblement compact) dans Y . Notre objectif maintenant est d'introduire cette propriété pour les opérateurs prenant des valeurs dans un espace métrique pointé Y . Le problème qui soulève l'éventuelle absence de structure linéaire dans un tel espace Y peut être évité si l'on observe d'après la Proposition (1.4.2 (a)) cet opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est Lipschitzien si, et seulement si, l'ensemble

$$\left\{ \frac{\delta_{T(x)} - \delta_{T(y)}}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}$$

est borné dans $\mathcal{F}(Y) \subset (Y^\#)^*$. Cela motive les concepts suivants.

Définition 4.1.1 *Soient X, Y deux espaces métriques pointés. On dit qu'un opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est Lipschitzien libre compact (resp. Lipschitzien libre faiblement compact) si l'ensemble*

$$\left\{ \frac{\delta_{T(x)} - \delta_{T(y)}}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}$$

est relativement compact (resp. relativement faiblement compact) dans $\mathcal{F}(Y)$.

On note par $Lip_{0FK}(X, Y)$ et $Lip_{0FW}(X, Y)$ l'ensembles d'opérateurs lipschitziens libres compacts et faiblement compacts entre X et Y , respectivement. On a

$$Lip_{0FK}(X, Y) \subset Lip_{0FW}(X, Y) \subset Lip_0(X, Y).$$

Dans le cas où Y est un espace de Banach, nous avons le fait suivant.

Proposition 4.1.1 *Soient X un espace métrique pointé et Y un espace de Banach. Chaque opérateur lipschitzien libre compact (resp Lipschitzien libre faiblement compact) de X dans Y est lipschitzien compact (resp Lipschitzien faiblement compact).*

Preuve. Si $T : X \longrightarrow Y$ est un opérateur Lipschitzien libre compact (resp. Lipschitzien libre faiblement compact), alors l'ensemble

$$\left\{ \frac{\delta_{T(x)} - \delta_{T(y)}}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}$$

est relativement compact (relativement faiblement compact) dans $\mathcal{F}(Y)$. par [16, Lemma 2.4], il y a un opérateur linéaire borné β_Y de $\mathcal{F}(Y)$ dans Y tel que $\beta_Y \circ \delta_Y(y) = y$ pour $y \in Y$. Il s'ensuit que

$$\left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\} = \left\{ \beta_Y \left(\frac{\delta_{T(x)} - \delta_{T(y)}}{d(x, y)} \right) : x, y \in X, x \neq y \right\}$$

est relativement compact (relativement faiblement compact) dans Y , et alors T est lipschitzien compact (resp Lipschitzien faiblement compact). ■

Nous étudions maintenant la relation entre la compacité lipschitzienne libre d'un opérateur lipschitzien et sa linéarisation.

4.1.1 Théorème de Schauder pour les opérateurs lipschitziens libres compacts

Théorème 4.1.1 (Théorème de Schauder). *Soient X, Y deux espaces métriques pointés et $T \in Lip_0(X, Y)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *L'opérateur T est lipschitzien libre compact.*
- (ii) *L'opérateur $\hat{T}$ est compact dans $\mathcal{L}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$.*
- (iii) *L'opérateur $T^\#$ est compact dans $\mathcal{L}(Y^\#, X^\#)$.*

Preuve. On pose $\tilde{X} = \{(x, y) \in X^2 : x \neq y\}$, $\delta_{\tilde{X}} : (x, y) \mapsto \frac{(\delta_x - \delta_y)}{d(x, y)}$ de $\tilde{X}$ dans $\mathcal{F}(X)$, on prend son image $\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X})$ et on note que

$$\widehat{T}(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X})) = \left\{ \frac{\delta_{T(x)} - \delta_{T(y)}}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}.$$

Comme $B_{\mathcal{F}(X)} = \overline{\Gamma}(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X}))$ par le Lemme (3.1.1) et la Proposition (1.4.1), l'équivalence entre (i) et (ii) découle d'inclusions

$$\widehat{T}(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X})) \subset \widehat{T}(\overline{\Gamma}(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X}))) \subset \overline{\Gamma}(\widehat{T}(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X}))).$$

L'équivalence entre (ii) et (iii), par la Proposition (1.4.2) en appliquant le théorème de Schauder et la propriété idéale d'opérateurs linéaires compacts entre les espaces de Banach.

■

4.1.2 Théorème de Gantmacher et Théorème de Factorisation de Davis-Figiel-Johnson-Pelczynski pour les opérateurs lipschitziens libres faiblement compacts

Théorème 4.1.2 Soient X, Y deux espaces métriques pointés et $T \in Lip_0(X, Y)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) L'opérateur T est lipschitzien libre faiblement compact.
- (b) L'opérateur $\widehat{T}$ est faiblement compact dans $\mathcal{L}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$.
- (c) L'opérateur $T^\#$ est faiblement compact dans $\mathcal{L}(Y^\#, X^\#)$.
- (d) Il existe un espace de Banach réflexif F , un opérateur linéaire bornée $f \in \mathcal{L}(F, \mathcal{F}(Y))$ et un opérateur lipschitzien $b \in Lip_0(X, F)$, tels que $\delta_Y \circ T = f \circ b$.

Preuve. De même que dans la preuve de Théorème 4.1.1, on peut prouver que (a), (b) et (c) sont équivalentes. Maintenant, si (b) est vraie, alors il existe un espace de Banach réflexif F et un opérateur $f \in \mathcal{L}(F, \mathcal{F}(Y))$ et $S \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(X), F)$, tel que $\widehat{T} = f \circ S$ en appliquant le Théorème de Factorisation de Davis-Figiel-Johnson-Pelczynski [11]. On pose $b = S \circ \delta_X$. Clairement, $b \in Lip_0(X, F)$ et $\delta_Y \circ T = \widehat{T} \circ \delta_X = f \circ S \circ \delta_X = f \circ b$. Alors (d) suit. Enfin, on suppose que (d) est vraie. On a

$$\left\{ \frac{\delta_{T(x)} - \delta_{T(y)}}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\} = \left\{ f \left(\frac{b(x) - b(y)}{d(x, y)} \right) : x, y \in X, x \neq y \right\}.$$

on note que

$$\left\{ \frac{b(x) - b(y)}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}$$

est un sous-ensemble borné de l'espace de Banach réflexif F et par conséquent, il est relativement faiblement compact. Puisque un opérateur linéaire T entre des espaces normés est norme à norme continue si, et seulement si, il est faible à faible continue, il s'ensuit que

$$\left\{ f \left(\frac{b(x) - b(y)}{d(x, y)} \right) : x, y \in X, x \neq y \right\}$$

est un sous-ensemble relativement faiblement compact de $\mathcal{F}(Y)$, et on obtient (a). ■

Proposition 4.1.2 *Soient X, Y deux espaces métriques pointés et $1 \leq p < \infty$. Chaque opérateur lipschitzien fortement p -intégral de X dans Y est lipschitzien libre faiblement compact.*

Preuve. Soit $T \in Lip_{0pSI}(X, Y)$ et on prend une factorisation lipschitzienne fortement p -intégrale

$$J_Y^L T = AI_{\infty, p} b : X \xrightarrow{b} L_\infty(\mu) \xrightarrow{I_{\infty, p}} L_p(\mu) \xrightarrow{A} (Y^\#)^*.$$

Si $p > 1$, alors $L_p(\mu)$ est réflexif et donc T est lipschitzien libre faiblement compact par le théorème 4.1.2. Pour $p = 1$, prendre $q > 1$ et factoriser $I_{\infty, 1} : L_\infty(\mu) \rightarrow L_1(\mu)$ par l'espace $L_q(\mu)$ sous la forme

$$I_{\infty, 1} = I_{q, 1} \circ I_{\infty, q} : L_\infty(\mu) \xrightarrow{I_{\infty, q}} L_q(\mu) \xrightarrow{I_{q, 1}} L_1(\mu).$$

Ensuite, nous obtenons la même conclusion. ■

4.1.3 Propriété idéale des classes d'opérateurs lipschitziens libres.

Proposition 4.1.3 *Soient X, Y, Z et V des espaces métriques pointés, $T \in Lip_0(X, Y)$ et $h \in Lip_0(Z, V)$. Si $g \in Lip_{0FK}(Y, Z)$ (resp $Lip_{0FW}(X, Y)$), alors $h \circ g \circ T \in Lip_{0FK}(X, V)$ (resp $Lip_{0FW}(X, V)$).*

Preuve. On suppose que $g \in Lip_{0FK}(Y, Z)$. Alors $\widehat{h} \in \mathcal{K}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(Z))$ par le théorème 4.1.1. Puisque $\mathcal{K}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(Z))$ est un opérateur idéal de Banach, alors $\widehat{h} \circ \widehat{g} \circ \widehat{T} \in \mathcal{K}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(V))$. Par la Proposition (1.4.2 (d)) il s'ensuit que $\widehat{h \circ g \circ T} \in \mathcal{K}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(V))$. Cela signifie que $h \circ g \circ T \in Lip_{0FK}(X, V)$ par le théorème 4.1.1. Le cas Lip_{0FW} est prouvé de la même manière. ■

4.2 Relations entre un opérateur T et $\widehat{T}$ (p -sommant, p -intégral, p -nucléaire).

Théorème 4.2.1 Soient X, Y deux espaces métriques pointés, $T \in Lip_0(X, Y)$ et $1 \leq p < \infty$.

- (i) Si L 'opérateur $\widehat{T}$ est p -sommant, alors T est Lipschitzien p -sommant et $Lip_{pS}(T) \leq \pi_p(\widehat{T})$.
- (ii) Si L 'opérateur $\widehat{T}$ est p -intégral, alors T est Lipschitzien p -intégral et $Lip_{pI}(T) \leq \iota_p(\widehat{T})$.
- (iii) Si L 'opérateur $\widehat{T}$ est p -nucléaire, alors T est Lipschitzien p -nucléaire et $Lip_{pN}(T) \leq \nu_p(\widehat{T})$.

Preuve. (i) On remarque d'abord que, Par la Proposition (1.4.2 (d)),

$$d(T(x), T(y)) = \|\delta_{T(x)} - \delta_{T(y)}\| = \|\widehat{T} \circ \delta_X - \widehat{T} \circ \delta_Y\| = \|\widehat{T}(\delta_X - \delta_Y)\|$$

pour tout $x, y \in X$. Si $\widehat{T}$ est p -sommants, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n \|\widehat{T}(\gamma_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(\widehat{T}) \sup_{F \in B_{\mathcal{F}(X)}^*} \left(\sum_{i=1}^n |F(\gamma_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour tout ensemble fini de vecteurs $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ dans $\mathcal{F}(X)$. Alors

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n d(T(x_i), T(y_i))^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(\widehat{T}) \sup_{F \in B_{\mathcal{F}(X)}^*} \left(\sum_{i=1}^n |F(\delta_{X_i} - \delta_{Y_i})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \pi_p(\widehat{T}) \sup_{g \in B_{X^\#}} \left(\sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $T \in Lip_{0pS}(X, Y)$ et $Lip_{pS}(T) \leq \pi_p(\widehat{T})$.

(ii) Si $\widehat{T}$ est p -intégral, on prend un factorisation p -intégrale sous la forme

$$J_{\mathcal{F}(Y)} \widehat{T} = AI_{\infty, p} B : \mathcal{F}(X) \xrightarrow{B} L_\infty(\mu) \xrightarrow{I_{\infty, p}} L_p(\mu) \xrightarrow{A} \mathcal{F}(Y)^{**}.$$

Soit $I_{\mathcal{F}(Y), (Y^\#)^*}$ l'opérateur d'inclusion de $\mathcal{F}(Y)$ à $(Y^\#)^*$. En utilisant cela $(Q_Y)^* J_{\mathcal{F}(Y)} = I_{\mathcal{F}(Y), (Y^\#)^*}$, $\delta_Y \circ T = \widehat{T} \circ \delta_X$ et $I_{\mathcal{F}(Y), (Y^\#)^*} \circ \delta_Y = J_Y^L$, on obtient la factorisation de Lipschitzienne p -intégrale suivante pour T :

$$J_Y^L T = (Q_Y)^* AI_{\infty, p} B \circ \delta_X : X \xrightarrow{\delta_X} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{B} L_\infty(\mu) \xrightarrow{I_{\infty, p}} L_p(\mu) \xrightarrow{A} \mathcal{F}(Y)^{**} \xrightarrow{(Q_Y)^*} (Y^\#)^*.$$

Par conséquent $T \in Lip_{0pI}(X, Y)$ et

$$Lip_{pI}(T) \leq Lip((Q_Y)^* A) Lip(B \circ \delta_X) \leq \|A\| \|B\|.$$

On déduit que $Lip_{pI}(T) \leq \iota_p(\widehat{T})$.

(iii) Prenons une factorisation p -nucléaire pour $\widehat{T}$:

$$\widehat{T} = AM_\lambda B : \mathcal{F}(X) \xrightarrow{B} \ell_\infty \xrightarrow{M_\lambda} \ell_p \xrightarrow{A} \mathcal{F}(Y).$$

On déduit une factorisation de Lipschitzienne p -nucléaire pour T :

$$T = \delta_Y^{-1} AM_\lambda B \circ \delta_X : X \xrightarrow{\delta_X} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{B} \ell_\infty \xrightarrow{M_\lambda} \ell_p \xrightarrow{A} \delta_Y(Y) \xrightarrow{\delta_Y^{-1}} Y.$$

■

Remarque 4.2.1 Les conversions dans le théorème 4.2.1 ne tiennent pas toujours. on note que l'opérateur d'identité I sur $\mathbb{R}$ est p -nucléaire et donc Lipschitz p -nucléaire, mais sa linéarisation $\widehat{I}$ est l'opérateur d'identité sur l'espace de Banach à dimension infinie $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ et donc, ne peut pas être p -sommant par le théorème de Dvoretzky-Rogers[10, 2.18].

Bibliographie

- [1] D. Achour, P. Rueda, E. A. Sánchez-Pérez and R. Yahia, Lipschitz operator ideals and the approximation property. J. Math. Anal. Appl. 436 (2016), 217–236.
- [2] R. F. Arens and J. Eels, *On embedding uniform and topological spaces*, Pacific J. Math **6** (1956), 397-403.
- [3] Ş. Cobzaş. *Adjoint of Lipschitz mappings*, Studia Univ. “Babeş–Bolyai”, Mathematica, **XLVIII** (1), (2003), 49-54.
- [4] D. Chen and B. Zheng. *Remarks on Lipschitz p -summing operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (8), (2011), 2891-2898.
- [5] D. Chen, B. Zheng. Lipschitz p -integral operators and Lipschitz p -nuclear operators, Nonlinear Anal. 75 (13) (2012), 5270–5282.
- [6] G. Carlier. Analyse fonctionnelle, ENS, 2008.
- [7] S. Cobzas. Compactness in spaces of Lipschitz functions, Rev. Anal. Numér. Théor.Approx., 30(2001), 9-14.
- [8] M. G. Cabrera-Padilla and A. Jiménez-Vargas A new approach on Lipschitz compact operators. Topol. Appl. 203, 22–31 (2016).
- [9] J. Dixmier. *Formes linéaires sur un anneau d’opérateurs*” Bull. Soc. Math. France, **81** (1953), 9-39.
- [10] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge. *Absolutely summing operators*” Cambridge Studies in Advanced mathematics **43** Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

- [11] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson and A. Pelczynski. Factoring weakly compact operators, *J. Funct. Anal.* **17** (1974), 311–327.
- [12] M. Djemiat, Les opérateurs lipschitziens compacts-mémoire de master 2016.
- [13] T. Figiel and N. Tomczack-Jaegermann. *Projections onto hilbertian subspaces of Banach spaces*, *Israel J. Math.* **33** (1979), 155-171.
- [14] J. D. Farmer and W.B. Johnson. *Lipschitz p -summing operators*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), 2989-2995.
- [15] A. Jiménez-Vargas, J. M. Sepulcre, Moisés Villegas-Vallecillos, Lipschitz compact operators, *J. Math. Anal. Appl.* **415** (2) (2014) 889-901.
- [16] N. J. Kalton and G. Godefroy. *Lipschitz-free Banach spaces*, *Studia Math.* **159** (2003), 121-141.
- [17] N. J. Kalton. *Spaces of Lipschitz and Hölder functions and their applications*, *Collect. Math.* **55**(2) (2004), 171-217.
- [18] A. Pietsch, *Operator Ideals*, *Deutsch. Verlag Wiss*, Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, pp. 247-259.
- [19] I. Sawashima. *Methods of Lipschitz duals*, in *Lecture Notes Ec. Math. Sust*, **419**, Springer Verlag (1975), 247-259.
- [20] S. Shitali and H. L. Vasudeva. *Metric spaces*, Springer-Verlag London Limited (2006).
- [21] N. Weaver. *Lipschitz Algebras*, World Scientific, Singapore 1999.
- [22] R. Yahia, D. Achour and P. Rueda. Absolutely summing Lipschitz conjugates. *Mediterranean J. Math.* 10.1007/s00009-015-0623-2.